

elle conduirait à une équation en x du quatrième degré.

Enfin l'équation

$$x^{10} - 1 = 0$$

peut être considérée comme résolue, puisque ses racines sont les racines carrées de celles de l'équation

$$x^5 - 1 = 0.$$

On en était là, lorsque Vandermonde donna les racines de l'équation

$$x^{11} - 1 = 0$$

dans un mémoire inséré parmi ceux de l'Académie des sciences (1771).

En 1801, Gauss donna une méthode générale pour résoudre toutes les équations de la forme $x^m - 1 = 0$; en fin Lagrange mit la dernière main à l'œuvre (*Résolution des équations numériques*, note XIV); mais nous nous bornerons aux cas que nous avons examinés et qui sont les seuls pratiques.

Nous ne terminerons pas cependant sans présenter, au sujet des racines imaginaires de l'unité, quelques remarques dont on fait souvent usage.

En premier lieu, les racines de l'unité, quel qu'en soit d'ailleurs l'indice, ont toujours pour module (v. ce mot), puisque les puissances correspondantes de leurs modules devraient reproduire le module 1 de l'unité.

Il en résulte que les racines des équations en x , auxquelles on ramène les équations

$$x^m - 1 = 0,$$

en posant

$$x + \frac{1}{x} = z,$$

sont toujours toutes réelles; car, si l'une des valeurs de x est

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

comme $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, la valeur correspondante de $\frac{1}{x}$ sera

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha + \beta\sqrt{-1}} = \frac{\alpha - \beta\sqrt{-1}}{\alpha^2 + \beta^2} = \alpha - \beta\sqrt{-1},$$

de sorte que $x + \frac{1}{x}$ se réduisant à 2α sera réel.

En second lieu, les puissances d'une même racine de l'unité positive reproduisent d'autres racines de même indice de la même unité; car si $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ est une des racines de l'équation $x^m = 1$, $(\alpha + \beta\sqrt{-1})^m = 1$, par suite,

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1})^{mn} = [(\alpha + \beta\sqrt{-1})^n]^m = 1;$$

ce qui signifie que $(\alpha + \beta\sqrt{-1})^n$ est encore une racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité.

Au reste, il ne faudrait pas interpréter le théorème en ce sens que les puissances d'une même racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité pussent, quel qu'il fût m , en reproduire toutes les autres racines $m^{\text{ièmes}}$; car si une puissance p , inférieure à m , d'une racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité, pouvait donner 1, ce qui, à la vérité exigerait que m fût divisible par p , il est évident que toutes les puissances possibles de cette racine ne pourraient, en tout cas, fournir que p valeurs différentes, et n'en fourniraient même pas toujours p , si p à son tour était décomposable en d'autres facteurs.

Pour qu'une des racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité pût reproduire toutes les autres, il faudrait qu'on ne pût retrouver l'unité avant de l'avoir élevée à la puissance m ; car, d'un côté, si les puissances, de degré inférieur à m , de la racine considérée, sont toutes différentes de 1, deux d'entre elles ne pourront être égales, puisque l'égalité

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1})^m - p = (\alpha + \beta\sqrt{-1})^m - q$$

entraînerait

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1})^q - p = 1;$$

et, de l'autre, si les m premières puissances de la racine considérée diffèrent les unes des autres, il faudra bien qu'elles reproduisent toutes les racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité, qui ne peuvent être qu'au nombre de m .

— *Résolution trigonométrique.* La résolution des équations binômes par les fonctions circulaires se déduit immédiatement de la formule de Moivre, que nous allons d'abord établir.

Si l'on effectue le produit

$$(\cos a + \sqrt{-1} \sin a) (\cos b + \sqrt{-1} \sin b),$$

on obtient

$$\cos a \cos b - \sin a \sin b + \sqrt{-1} (\sin a \cos b + \cos a \sin b),$$

ou

$$\cos(a + b) + \sqrt{-1} \sin(a + b);$$

on trouverait de même

$$(\cos a + \sqrt{-1} \sin a) (\cos b + \sqrt{-1} \sin b)$$

$$(\cos c + \sqrt{-1} \sin c) = \cos(a + b + c) + \sqrt{-1} \sin(a + b + c),$$

et ainsi de suite.

En supposant $a, b, c, \dots$ égaux entre eux, il en résulte :

$$(\cos a + \sqrt{-1} \sin a)^m = \cos(ma) + \sqrt{-1} \sin(ma);$$

c'est la formule de Moivre.

Cela posé, on remarque que toute quantité imaginaire de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ peut toujours recevoir celle de

$$\rho (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)$$

ρ étant positif; en effet, l'équation

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \rho (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)$$

donne

$$\alpha = \rho \cos \varphi \quad \text{et} \quad \beta = \rho \sin \varphi;$$

d'où

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos \varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

et

$$\sin \varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

ρ est le module de $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ et φ en est l'argument.

Il résulte de là que l'équation binôme peut être présentée sous la forme

$$x^m = R (\cos A + \sqrt{-1} \sin A)$$

et que l'une quelconque de ses racines

$$\rho (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)$$

sera donnée par l'équation

$$\rho^m (\cos m\varphi + \sqrt{-1} \sin m\varphi) = R (\cos A + \sqrt{-1} \sin A).$$

Cette équation se décompose en

$$\rho^m \cos m\varphi = R \cos A \quad \text{et} \quad \rho^m \sin m\varphi = R \sin A$$

qui donnent

$$\rho^m = R^2 \quad \text{d'où} \quad \rho = \sqrt[m]{R}$$

et

$$m\varphi = 2k\pi + A, \quad \text{d'où} \quad \varphi = \frac{2k\pi + A}{m}$$

k désignant un nombre entier quelconque.

Les racines de l'équation proposée sont donc toutes fournies par l'expression

$$\sqrt[m]{R} \left(\cos \frac{2k\pi + A}{m} + \sqrt{-1} \sin \frac{2k\pi + A}{m} \right)$$

où l'on peut donner à k toutes les valeurs entières positives ou négatives.

Au reste, cette expression ne comporte que m déterminations distinctes, car si l'on donnait $(m+1)$ valeurs entières consécutives à k , l'argument de x correspondant à la dernière valeur de k aurait une différence 2π avec l'argument correspondant à la première, et par suite les deux valeurs de x seraient égales.

On représente graphiquement les m racines de l'équation binôme

$$x^m = R (\cos A + \sqrt{-1} \sin A)$$

en portant, à partir de l'extrémité de l'arc $\frac{A}{m}$,

les m divisions de la circonférence; les cosinus et sinus des arcs qui, commençant à l'origine de $\frac{A}{m}$, se terminent aux points de division,

fournissent, au facteur constant près $\sqrt[m]{R}$, les parties réelles et imaginaires des m racines cherchées.

— *Différentielles binômes.* On nomme différentielles binômes les expressions de la forme

$$x^m (a + bx^n)^p dx.$$

On peut effectuer algébriquement l'intégration dans deux cas qu'il s'agit de reconnaître.

Remarquons d'abord qu'on peut toujours supposer m et n entiers, car si on faisait

$$m = \frac{m'}{n'} \quad \text{et} \quad n = \frac{n'}{n'},$$

en posant

$$x = z^{m'' n''}, \quad \text{d'où} \quad dx = m'' n'' z^{m'' n'' - 1} dz,$$

on serait ramené à la différentielle

$$m'' n'' z^{m'' n'' - 1} (a + bz^{m'' n''})^p dz$$

dans laquelle il n'y aurait que p de fractionnaire.

Si, dans l'expression proposée, on remplace

$$a + bx^n \text{ par } y, \text{ c'est-à-dire } x \text{ par } \left(\frac{y-a}{b} \right)^{\frac{1}{n}}$$

et dx par $\frac{1}{nb} \left(\frac{y-a}{b} \right)^{\frac{1}{n} - 1} dy$, cette expression proposée se change en

$$\frac{1}{nb} y^p \left(\frac{y-a}{b} \right)^{\frac{m+1}{n} - 1} dy;$$

si donc $\frac{m+1}{n}$ est entier, positif ou négatif,

l'expression ne contiendra plus d'irrationalité que le facteur y^p et on la rendra facilement rationnelle. C'est le premier cas d'intégrabilité.

On en obtient un autre en mettant la différentielle proposée sous la forme

$$x^m + np (ax^{-n} + b)^p dx,$$

car si on applique le caractère trouvé précédemment, on voit qu'il conduit à la condition que $\frac{m+1}{n} + p$ soit entier.

BINONDO, nom de l'un des nombreux faubourgs de Manille, île de Luçon; résidence des principales autorités de la province, siège des tribunaux; 29,211 hab. Fabrique de tabac qui occupe plus de 8,000 personnes; fonderie de canons, fabriques d'armes; commerce considérable.

BINO-QUADRI-UNITAIRE adj. (du lat. *binus*, double; *quadrinus*, quadruple, et du fr. *unitaire*). Minér. Se dit d'un cristal résultant d'un décroissement par deux rangées, et de quatre décroissements par une rangée.

BINOSÉNAIRE adj. (bi-no-sé-nè-re — du lat. *binus*, double; *senarius*, sextuple). Minér. Se dit d'un cristal résultant d'un décroissement par deux rangées, et d'un décroissement par six rangées.

BINOT s. m. (bi-no — rad. *biner*). Agric. Sorte de petite charrue qui sert à biner et à recouvrir les semences : *Le binot a beaucoup d'analogie avec la charrue à deux versoirs.* (Math. de Dombasle.) || Sorte de sarclou. || On dit aussi BINET et BINOR.

— *Encycl.* Le *binot* ou *binot* est particulièrement employé dans le nord de la France, en Belgique et dans l'Allemagne septentrionale. Il est employé soit pour donner au sol certaines façons exigées par les végétaux plantés ou semés en lignes, soit pour donner des labours légers, soit pour préparer ou effectuer les semailles sur ados, soit enfin pour nettoyer ou tracer les sillons destinés à faciliter l'écoulement des eaux surabondantes dans les terres cultivées. C'est à M. L. Gosin que l'on doit les détails les plus intéressants sur l'emploi de cet instrument; nous ne pouvons mieux faire que de le citer : « Si le laboureur incline l'instrument, il fait sortir de terre une oreille dont l'action se trouve annihilée, tandis que l'autre agit d'une manière complète. Pour labourer, en revenant toujours dans le même sillon, il suffit donc de faire pencher alternativement le *binot* à droite et à gauche. Cet instrument ameublit très-bien la surface du sol, mais il ne donne pas une culture de profondeur uniforme, puisque le soc se trouve incliné, et il enterre imparfaitement les mauvaises herbes. Aussi ne doit-on considérer ce labour que comme un travail supplémentaire qui, très-utile dans certains cas, ne dispense pas de l'emploi d'autres charrues. Lorsqu'on se sert du *binot* sans l'incliner, on rejette la terre des deux côtés de la raie ouverte. Supposé qu'on trace de semblables sillons sur toute l'étendue du champ, celui-ci se trouve fouillé à moitié et divisé en un grand nombre de petits ados. Ce labour assainit très-bien la terre et l'expose fortement aux influences atmosphériques; mais on doit toujours le faire suivre ou précéder par d'autres labours, afin que le sol reçoive un ameublissement complet. Dans plusieurs parties de la France, c'est ainsi qu'on enterre les semences. Après la germination, le champ présente une suite de zones étroites séparées par autant de sillons qui restent vides. Comme la terre végétale est accumulée sur l'espace ensemencé, le végétal se trouve dans des conditions de réussite particulière; mais le sol n'étant alors productif que partiellement, il faut n'adopter cette disposition que pour les champs de qualité médiocre. »

BINOTAGE s. m. (bi-no-ta-je — rad. *binot*). Agric. Façon donnée à la terre avec le binot. || On dit aussi BINOTIS.

BINOTÉ, ÉE (bi-no-té) part. pass. du v. *Binoter*. Labouré au moyen du binot : *Pièce de terre BINOTÉE.*

BINOTER v. a. ou tr. (bi-no-té — rad. *binot*). Agric. Biner au moyen du binot : *BINOTER une terre.*

BINO-TERNAIRE adj. (bi-no-tér-nè-re — du lat. *binus*, double; *ternus*, troisième). Minér. Se dit d'un cristal qui résulte d'un décroissement par deux rangées, et d'un décroissement par trois rangées.

BINOTIS s. m. (bi-no-ti). Agric. Syn. de *binotage*.

BINO-TRIUNITAIRE adj. (du lat. *binus*, double; *tres*, trois, et du fr. *unitaire*). Minér. Se dit d'un cristal qui résulte d'un décroissement par deux rangées, et de trois décroissements par une rangée.

BINTANG, île de l'Océanie, dans la Malaisie, archipel de la Sonde, à l'extrémité S. de la presqu'île de Malacca, séparée de Singapour par le détroit de ce nom; longueur 28 kilom. sur 12 kilom. de large; 23,861 hab. dont les deux tiers chinois; ville principale Riouv; place de commerce importante et port franc. Récolte et exportation de poivre et de gambier. Cette île fait partie des possessions hollandaises.

BINTANGOR s. m. (bain-tan-gor). Bot. Nom malabare d'un arbre de la famille des guttifères, que les botanistes appellent *colophylle inophylle*.

BINTERIM (Antoine-Joseph), controversiste allemand, né en 1779 à Dusseldorf, mort en 1855. Elevé chez les jésuites, il fut reçu docteur en théologie en 1822, et resta toute sa vie simple curé du village de Bilk. L'ardeur de son zèle religieux qu'il soutint quel-

quefois avec raison contre certains abus, mais en des termes trop violents, lui suscita de puissantes inimitiés. Les plus importants de ses nombreux écrits sont : *Recueil des principes écrits sur le divorce* (1807); *les Fastes de l'Eglise catholique* (1825-1832); *Histoire pragmatique des synodes nationaux, provinciaux et diocésains en Allemagne* (1835-1845); *l'Ancien et le nouveau diocèse de Cologne* (1828-1831); *Hermann II, évêque de Cologne* (1851), etc.

BINTINAYE (Agathon-Marie-René DE LA), marin français, né à Rennes en 1758, mort en 1792. Il était enseigne de vaisseau à bord de la *Surveillante*, au combat d'Ouessant en 1779, et il eut le bras fracassé d'un coup de mitraille au moment où il s'élançait sur le bord ennemi. A l'époque de la Révolution, il était parvenu au grade de major de vaisseau. Il périt dans un naufrage.

BINTU s. m. (bain-tu). Ornith. Nom de l'ortolan dans les départements de l'ouest.

BINUBE s. (bi-nu-be — du lat. *bis*, deux fois; *nubo*, je me marie). Anc. jurispr. Personne qui s'est mariée deux fois.

BINUNGA s. m. (bi-non-ga). Bot. Plante des îles Philippines.

BIOBIO, fleuve de l'Amérique du Sud, dans le Chili, sort du mont Tucapel dans les Andes, passe à Santa-Fé et à la Concepcion, coule de l'E. à l'O. et se jette dans l'océan Pacifique, après un cours de 350 kilom. Ses principaux affluents sont la Luya et la Vergara; il forme la limite entre le Chili et l'Argentine.

BIOCELLÉ, ÉE adj. (bi-o-sè-lé — de *bi* et *ocellé*). Hist. nat. Qui est marqué de deux petites taches semblables à la prune de l'œil.

BIOCHIMIE s. f. (bi-o-chi-mi — du gr. *bios*, vie, et du fr. *chimie*). Partie de la chimie qui traite des substances produites par l'organisme vital.

BIOCHIMIQUE adj. (bi-o-chi-mi-ke — rad. *biochimie*). Qui appartient à la biochimie ou aux productions chimiques de l'organisme vital.

BIOCOLYTE s. m. (bi-o-kol-é — du gr. *bios*, force; *kólud*, j'empêche). Hist. Officier de l'empire grec chargé de réprimer les désordres qui pouvaient se commettre.

BIOCLAIRE adj. (bi-o-ku-lè-re). Syn. de *binoculaire*.

BIOCULÉ, ÉE adj. (bi-o-ku-lé). Syn. de *binoculé*.

BIODYNAMIQUE s. f. (bi-o-di-na-mi-ke — du gr. *bios*, vie, et du fr. *dynamique*). Théorie des forces vitales.

BIERN ou **BIORN**, nom de plusieurs rois de Suède. — *BIERN Ier* fut surnommé *Côte de Fer*, et il régna dans le VIII^e siècle. — *BIERN III*, au IX^e siècle, envoya une ambassade à Louis Ier le Débonnaire, et permit à saint Ansbach de prêcher l'Evangile aux peuples de la Scandinavie.

BIERNER (Eric-Jules), savant antiquaire suédois, né en 1696, mort en 1750. Il remplit les fonctions d'interprète du roi et celles de secrétaire du bureau des antiquités. Un voyage qu'il fit dans le nord de la Suède lui fournit l'occasion de recueillir de précieux renseignements sur les antiquités du pays et principalement sur les monuments runiques. On a de lui, en latin : *Prodromus geographiae Scandinaviae veteris* (1726); *Veterum hyperboreorum armilla et annuli* (1739); *De orthographia linguae sveo-gothicae* (1742); *Schediasma historico-geographicum de Varegis herobus et primis Russiæ dynastiis* (1743), et quelques ouvrages du même genre en suédois.

BIOGÈNE adj. (bi-o-jè-ne — du gr. *bios*, vie; *gennad*, j'engendre). Bot. Qui croît en parasite sur une plante : *Végétal BIOGÈNE.*

BIOGÉNIE s. f. (bi-o-jé-ni — du gr. *bios*, vie; *gennad*, je produis). Physiol. Phase de la vie comprenant la série des phénomènes qui ont lieu depuis la conception jusqu'au développement complet du fœtus : *La biogénie comprend l'ovogénie, l'embryogénie et la téléogénie.* (L. Laurent.)

BIOGÉNIQUE adj. (bi-o-jé-ni-ke — rad. *biogénie*). Physiol. Qui appartient, qui a rapport à la biogénie.

BIOGLIO, bourg du royaume d'Italie, prov. et à 8 kilom. N.-E. de Biella, chef-l. de mandement : 2,357 hab. Fabriques de draps et de bas.

BIOGRAPHE s. m. (bi-o-gra-fe — du gr. *bios*, vie; *graphô*, j'écris). V. *BIOGRAPHIE*. Auteur d'une ou de plusieurs vies particulières : *BIOGRAPHE impartial. BIOGRAPHE passionné.* Nous n'avons pas un *BIOGRAPHE à comparer à Plutarque.* (La Harpe.) Il avait cherché des preuves à ses principes dans l'histoire des grands hommes dont l'existence, mise à jour par les *BIOGRAPHES*, fournit des particularités curieuses sur les actes de leur entendement. (Balz.)

BIOGRAPHIE s. f. (bio-gra-fie — L'étymologie immédiate de ce mot n'offre aucune difficulté, et ne présente aussi, on peut le dire, qu'un médiocre intérêt. Il suffit de le décomposer pour y retrouver les deux thèmes grecs *bios*, vie, et *graphein*, écrire. Mais si nous voulons faire l'histoire complète de chacun de ces éléments constitutifs, nous nous