

peut manquer; car, dans chaque produit partiel, tous les termes ayant le même signe, +, la réduction n'en peut faire disparaître aucun.

Ainsi le développement de la puissance m du binôme $x + a$ peut recevoir la forme:

$$x^m + C_1 a x^{m-1} + C_2 a^2 x^{m-2} + C_3 a^3 x^{m-3} + \dots + C_n a^n x^{m-n} + \dots + a^m,$$

en sorte que ce qu'il faut découvrir, c'est la loi de formation des coefficients $C_1, C_2, \dots, C_{m-1}$, qui, du reste, ne dépendent que de m .

On démontre facilement, sans l'aide d'aucune théorie, que C_1 est égal à m ; quant aux autres coefficients, il serait impossible d'apercevoir la loi suivant laquelle ils se forment, si l'on faisait à mesure la réduction des termes semblables.

Nous rechercherons donc d'abord la loi de formation des coefficients des différentes puissances de x dans un produit de m binômes tous dissemblables:

$$x + a, x + b, x + c, \dots, x + k.$$

Pour revenir ensuite à la puissance m du binôme $x + a$, il suffira de supposer $b, c, d, \dots, k$ égaux tous à a .

Formons d'abord les premiers produits:

$$\begin{array}{l} x + a \\ x + b \\ \hline x^2 + a|x + ab \\ \quad + b| \\ \hline x + c \\ x^2 + a|x + ab \\ \quad + b| \quad + ac \\ \quad + c| \quad + bc \\ \hline x + d \\ x^2 + a|x + ab \\ \quad + b| \quad + ac \quad + abd \\ \quad + c| \quad + bc \quad + acd \\ \quad + d| \quad + ad \quad + bcd \\ \quad + bd \\ \quad + cd \end{array}$$

L'inspection seule de ces différents produits permettrait d'affirmer que le coefficient du second terme est la somme des seconds termes des binômes facteurs; que celui du troisième terme est la somme des produits deux à deux des seconds termes de ces binômes; que le quatrième terme a pour coefficient la somme des produits trois à trois des mêmes seconds termes, et ainsi de suite; enfin, que le dernier terme est le produit des seconds termes des facteurs binômes.

On établira complètement la réalité de cette loi en l'étendant du cas de m binômes à celui de $m + 1$.

Cela posé, si maintenant on suppose que les seconds termes de tous les binômes multipliés deviennent égaux, on reconnaîtra que le coefficient que nous avons désigné par C_n est le nombre des produits n à n qu'on peut obtenir avec des lettres en nombre égal à l'exposant de la puissance qu'on veut développer.

Ce nombre de produits (v. COMBINATIONS) est

$$C_m, n = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n},$$

en donnant donc successivement à n , dans cette formule, les valeurs $1, 2, 3, \dots, (m-1)$, on obtiendra les valeurs des coefficients

$$C_1, C_2, \dots, C_{m-1}$$

du développement de la puissance m du binôme.

On trouvera ainsi:

$$\begin{aligned} (x+a)^m &= x^m + m a x^{m-1} \\ &\quad + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2} + \dots \\ &\quad + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} a^n x^{m-n} \\ &\quad + \dots + a^m. \end{aligned}$$

Dans la pratique, pour former les valeurs numériques des coefficients, on se sert d'une règle fort simple au moyen de laquelle on déduit aisément chaque terme du précédent, à l'aide d'un calcul toujours facile: les deux termes de rangs n et $n+1$ sont:

$$\frac{m(m-1)\dots(m-n+2)}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} x^{m-n+1} a^{n-1}$$

et

$$\frac{m(m-1)\dots(m-n+2)(m-n+1)}{1 \cdot 2 \dots (n-1) \cdot n} x^{m-n} a^n,$$

on voit que le coefficient du second se forme de celui du premier en le multipliant par $\frac{m-n+1}{n}$, c'est-à-dire qu'on déduit chaque

coefficient de celui qui le précède en le multipliant par l'exposant de x dans le terme qui précède, et le divisant par l'exposant de a dans celui qu'on veut former. Comme tous les coefficients du développement doivent être entiers, la division par n doit toujours être possible: on simplifie donc d'abord la fraction $\frac{m-n+1}{n}$; on divise ensuite le coefficient du terme précédent par le dénominateur de la fraction $\frac{m-n+1}{n}$ réduite, et enfin on multiplie le quotient trouvé par son numérateur.

Quand on donne à n ses premières valeurs

$1, 2, \dots$, le facteur $\frac{m-n+1}{n}$ est d'abord plus

grand que 1; au contraire, il devient moindre que 1 lorsqu'on approche de $n=m-1$; par conséquent, les coefficients du binôme vont d'abord en augmentant, pour diminuer ensuite. Du reste, comme $\frac{m-n+1}{n}$ diminue tou-

jours à mesure que n augmente de 1 à $m-1$, il en résulte que les coefficients n'ont qu'une seule période de croissance et une seule de décroissance, et puis, par raison de symétrie, ils redeviennent égaux à égale distance des extrêmes, on peut en conclure qu'ils vont en augmentant jusqu'au terme du milieu, si m est pair, ou jusqu'aux deux termes du milieu, dans le cas contraire, et reprennent ensuite les mêmes valeurs en décroissant.

On voit ainsi qu'il n'est nécessaire de pousser le calcul direct des coefficients que jusqu'au terme du milieu ou jusqu'au premier des deux termes du milieu.

Si l'on avait déjà formé une puissance d'un binôme et qu'on eût besoin de la suivante, on ne devrait pas en calculer directement les coefficients; il serait plus simple de faire la multiplication, qu'on éviterait d'ailleurs de poser, en remarquant simplement que, dans le développement de $(x+a)^{m+1}$, chaque coefficient serait la somme du coefficient du terme de même rang dans $(x+a)^m$ et de son précédent.

Cette remarque fournit une formule souvent employée:

$$C_{m+1, n} = C_{m, n} + C_{m, n-1}.$$

Les coefficients des derniers termes du développement se simplifient comme on l'a vu: le dernier coefficient est 1, l'avant-dernier m , l'antépénultième $\frac{m(m-1)}{2}$, etc. On indique le plus souvent ces simplifications dans la transcription de la formule. Dans les applications à l'analyse générale, il est le plus souvent préférable de noter le développement comme on ferait une série (v. ce mot) à termes régulièrement formés les uns des autres.

Ce développement, transcrit comme s'il devait être illimité, s'arrêtera de lui-même au $(m+1)^{\text{ème}}$ terme, puisque les numérateurs des suivants contiendraient le facteur $(m-m)$ ou zéro, et la formule sera plus symétrique.

Nous avons toujours expressément supposé dans ce qui précède l'exposant du binôme entier et positif. Newton avait étendu sa formule au cas où l'exposant deviendrait négatif ou fractionnaire, et Lagrange a cru pouvoir en faire usage dans ces deux cas.

La démonstration de Newton n'était pas excellente, ce qui importe peu, puisque la question se trouve résolue par la formule de Taylor, dont celle de Newton n'est qu'un cas particulier très-simple (v. SÉRIES); mais la hardiesse de Lagrange a été critiquée avec raison pour deux motifs: le premier, que le développement n'est pas toujours convergent, et le second que ce développement, non-seulement ne fournissait qu'une des valeurs que devait avoir la puissance m du binôme, lorsque m était fractionnaire, mais qu'on ne savait même pas laquelle il fournissait.

Ces difficultés, insurmontables à l'époque de Lagrange, ont été levées depuis par les recherches de Cauchy, d'Abel et de M. Maximilien Marie.

On sait aujourd'hui, par les travaux d'Abel et de Cauchy sur la série de Taylor, que la convergence du développement

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \dots,$$

illimité lorsque m est fractionnaire, incommensurable, ou seulement négatif, exige que le module de x soit moindre que 1.

D'un autre côté, Abel a établi le premier, mais par des considérations exclusivement propres à la question du développement du binôme, que celle des valeurs de la fonction

$$(1+x)^n,$$

que représente la série, est, en désignant par φ le module de $1+x$, et par φ son argument, fournie par celle des formes de la formule

$$\varphi^{\frac{m}{n}} \left(\cos \frac{m\varphi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{m\varphi}{n} \right),$$

que l'on obtient en ramenant m dans les limites $-\pi$ et $+\pi$, par l'addition ou la soustraction d'un nombre convenable de circonférences.

M. Marie est arrivé au même résultat par application de théorèmes plus généraux sur le développement d'une fonction quelconque par la formule de Taylor (*Journal de Liouville*, 2^e série, tome VI, 1861).

Voici la démonstration très-simple de M. Marie:

La conjuguée (v. ce mot) à abscisses réelles du lieu représenté par l'équation

$$y^n = (1+x)^m$$

a ses branches représentées, du côté des x plus grands que -1 , par les équations

$$y = \sqrt[n]{(1+x)^m} \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{2k\pi}{n} \right),$$

le radical représentant celle de ses valeurs qui est réelle et positive; et du côté des x moindres que -1 , par les équations

$$y = \sqrt[n]{-(1+x)^m} \left(\cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{(2k+1)\pi}{n} \right);$$

la série pour $x=0$ donne $y=1$, c'est-à-dire l'ordonnée d'un point de la branche

$$y = \sqrt[n]{(1+x)^m} \left(\cos \frac{0}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{0}{n} \right),$$

et elle peut fournir celles des points infiniment voisins de cette même branche, puisqu'elle est continue.

D'ailleurs, il est aisé de voir qu'elle ne saurait donner l'ordonnée d'aucun point d'une des autres branches; car, dans une pareille hypothèse, si on faisait revenir x par valeurs réelles, de la valeur de l'abscisse réelle de ce point, à zéro, la série ne pouvant varier que d'une manière continue fournirait successivement les ordonnées de tous les points de la branche où se trouve ce point de départ; elle donnerait donc, pour $x=0$, une autre valeur que $y=1$, ce qui n'est pas.

Il résulte de là que la région de convergence, ou la portion du plan recouverte par l'ensemble de tous les points réels ou imaginaires (v. COORDONNÉES ET CONJUGUÉS) que peut fournir la série, tant qu'elle reste convergente, cette région comprend l'arc de la branche

$$y = \sqrt[n]{(1+x)^m} \left(\cos \frac{0}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{0}{n} \right),$$

de la conjuguée à abscisses réelles, qui s'étend de $x=-1$ à $x=+1$, et s'épanouit autour de cet arc, mais n'entame aucune des autres branches de la conjuguée à abscisses réelles.

C'est bien à dire que l'argument de la valeur de y représentée par la série n'atteint même jamais, dans ses variations continues, les limites $+\frac{\pi}{n}$ et $-\frac{\pi}{n}$ qui correspondent

aux deux branches de la conjuguée à abscisses réelles les plus voisines de la branche qui contient le point origine $x=0, y=1$ où l'argument de y est nul.

— *Equations binômes.* On nomme *équations binômes* les équations de la forme

$$x^m = A$$

où A peut être soit réel, soit imaginaire. Les racines de ces équations s'expriment très-aisément et de la manière la plus commode pour le calcul numérique, au moyen des fonctions circulaires, comme nous l'expliquerons bientôt. La résolution, par radicaux, de ces équations, ne présente donc plus guère qu'un intérêt historique; aussi ne nous y arrêterons-nous que fort peu.

Si a et b désignent deux racines de l'équation

$$x^m = A,$$

des égalités supposées

$$a^m = A \quad \text{et} \quad b^m = A,$$

on pourra tirer

$$\left(\frac{b}{a} \right)^m = 1,$$

ce qui signifie que les rapports des m racines de l'équation

$$x^m = A$$

à l'une d'entre elles sont les racines de

$$x^m = 1,$$

parmi lesquelles il s'en trouve nécessairement une qui ait pour valeur l'unité.

Ainsi, si l'on pouvait connaître une seule-ment des racines de l'équation

$$x^m = A,$$

on les obtiendrait ensuite toutes en multipliant celle-là par les m racines $m^{\text{èmes}}$ de l'unité.

Or, quoique le calcul n'en soit pas toujours aisé, on pouvait supposer connue cette première racine $m^{\text{ème}}$ de A ; car si A était positif, l'arithmétique élémentaire fournissait la racine cherchée; si A était négatif et que m fût impair, la racine $m^{\text{ème}}$ arithmétique de A , affectée du signe-, donnait la racine algébrique cherchée; si A était toujours négatif, m était pair, on était ramené à des extractions de racines carrées d'imaginaires de la forme $a + b\sqrt{-1}$, opération que l'on savait effectuer; enfin, si A était imaginaire, on pouvait développer sa racine $m^{\text{ème}}$ par la formule du binôme.

Les géomètres s'étaient donc bornés à la recherche des racines des équations de la forme

$$x^m = 1 \quad \text{ou} \quad x^m - 1 = 0$$

L'équation

$$x^2 = 1$$

donne immédiatement

$$x = \pm \sqrt{-1}.$$

Le premier membre de l'équation

$$x^3 - 1 = 0$$

est divisible par $x-1$, et l'équation peut se mettre sous la forme

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0;$$

en sorte que les deux racines cubiques imaginaires de l'unité sont fournies par l'équation

$$x^2 + x + 1 = 0,$$

qui donne

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{3} \sqrt{-1}}{2};$$

la vérification donnera lieu à cette remarque: que le carré de l'une d'elles est égal à l'autre.

L'équation

$$x^4 - 1 = 0$$

peut se décomposer en

$$x^2 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + 1 = 0,$$

qui donnent

$$x = \pm 1 \quad \text{et} \quad x = \pm \sqrt{-1}.$$

L'équation

$$x^5 - 1 = 0$$

se décompose en

$$x - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

Pour résoudre cette dernière, on peut la mettre, en divisant tous les termes par x^2 , sous la forme

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + \left(x + \frac{1}{x} \right) + 1 = 0;$$

si alors on pose

$$x + \frac{1}{x} = z,$$

il en résulte, en élevant au carré

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2;$$

la substitution conduit à l'équation

$$z^2 + z - 1 = 0$$

qui donne

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

de sorte que les valeurs de x , que devait fournir l'équation

$$x + \frac{1}{x} = z$$

seront données par

$$x^2 - \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} x + 1 = 0;$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}} \sqrt{-1}.$$

L'équation

$$x^6 - 1 = 0$$

se décompose en

$$x^3 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x^3 + 1 = 0,$$

or, les racines de

$$x^3 - 1 = 0$$

sont connues, et celles de

$$x^3 + 1 = 0$$

n'en diffèrent que par le facteur (-1) .

L'équation

$$x^7 - 1 = 0,$$

en divisant par $x-1$, se ramène à

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

d'où

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + \left(x + \frac{1}{x} \right) + 1 = 0,$$

et, en posant comme plus haut

$$x + \frac{1}{x} = z,$$

ce qui donne

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$$

et

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = z^3 - 3z,$$

on tombe sur l'équation

$$z^3 + z^2 - 2z - 1 = 0,$$

dont les racines devraient être substituées à x dans

$$x + \frac{1}{x} = z;$$

mais cette équation est du troisième degré.

L'équation

$$x^8 - 1 = 0$$

se décomposerait en

$$x^4 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x^4 + 1 = 0$$

dont les racines peuvent s'obtenir.

Quant à l'équation

$$x^9 - 1 = 0$$

traitée comme l'équation

$$x^7 - 1 = 0,$$